МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Кемеровский государственный университет»

«УТВЕРЖДАЮ»

Директор института фундаментальных наук,

Гудов Александр Михайлович

____

(подпись руководителя, печать института)

«26» сентября 2019 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ,
проводимых КемГУ самостоятельно,
для поступающих по программам магистратуры
по направлению подготовки

01.04.01 Математика
в 2020 году

КЕМЕРОВО, 2019

Основные положения

Программа вступительных испытаний по математике составлена в соответствии с ФГОС. Каждый раздел программы содержит вопросы, позволяющие определить знания, умения и навыки уровня бакалавриата, которыми должен обладать поступающий в магистратуру.

Целью вступительных испытаний по математике является определение теоретической и практической подготовленности поступающего к освоению программы магистратуры, то есть комплексная оценка знаний, умений и навыков в области математики и её приложений с учетом специфики магистерской программы «Преподавание математики и информатики».

В программу вступительных испытаний по математике включены следующие разделы:

- Математический анализ;
- Алгебра и геометрия;
- Теория функций комплексного переменного;
- Функциональный анализ;
- Дифференциальные уравнения.

В программе представлены основные теоретические вопросы, которыми должен владеть поступающий; учебная и учебно-методическая литература по теоретическим и практическим разделам; регламент проведения вступительных испытаний и образцы заданий.

Регламент

вступительных испытаний по математике

1. Продолжительность проведения вступительных испытаний 180 минут (3 часа)
2. Задание вступительного испытания (по математике) содержит 12 вопросов. Первые 10 заданий имеют тестовых характер, последние 2 задания – это ситуационные задачи, они предполагают развернутый ответ.
3. Во время вступительного испытания запрещено пользоваться учебниками, конспектами, другой литературой, а также техническими средствами связи.
4. Ответ оформляется письменно и содержит краткие ответы на 10 первых вопросов и подробные поэтапные решения двух последних вопросов.
5. Ответ проверяет комиссия, состоящая не менее чем из трех экзаменаторов.
6. Каждый вопрос оценивается в баллах. Правильный ответ каждого вопроса из первых 10 оценивается в 5 баллов. Неправильный ответ – 0 баллов. Два последних вопроса оцениваются от 0 до 25 баллов дифференцированно следующим образом:
   - до 5 баллов – постановка проблемы, определение основных переменных;

- до 10 баллов – построение математической модели;
- до 15 баллов – построение математической модели и решение одного из этапов задачи этой модели;
- до 20 баллов – решение задачи с незначительными ошибками или недочетами;
- 25 баллов – полное правильное решение задачи

7. Апелляция проводится в день опубликования результатов или на следующий день после опубликования результатов.

Образец задания

Вопрос 1. Ядро и образ линейного отображения векторных пространств.

Вопрос 2. Какое отображение называется линейным?

Вопрос 3. Свойства гиперболы.

Вопрос 4. Понятие евклидова пространства.

Вопрос 5. Понятие ортонормированного базиса.

Вопрос 6. Формула Грина.

Вопрос 7. Как находится радиус сходимости степенного ряда?

Вопрос 8. Что такое комплексное число, модуль и аргумент комплексного числа?

Вопрос 9. Найти производную функции $f(x)=\dfrac{\sin(2^x)}{\cos(x^2)}$.

Вопрос 10. Найти интеграл $\int \ln x dx$.

Вопрос 11. Предприятие выпускает емкости объёмом 100 л. в форме прямоугольного параллелепипеда. При этом, для соединения боковых граней используются дорогостоящие угловые соединения трех видов: для одной пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений первого типа равна 125$, для другой пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений второго типа равна 75$, а для боковых ребер стоимость 1 м угловых соединений третьего типа равна 200$. Найти при каких размерах емкости расходы по закупке уголков будут минимальными.

Вопрос 12. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 20. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?

Варианты оценивания ответов

Вопрос 4. Понятие евклидова пространства.

Правильный ответ – 5 баллов, неправильный ответ – 0 баллов.

Правильный ответ: Векторное пространство V называется евклидовым, если на нем задано скалярное произведение, т.е. билинейная симметричная положительно определенная функция двух векторных аргументов.

Вопрос 5. Понятие ортонормированного базиса.

Правильный ответ – 5 баллов, неправильный ответ – 0 баллов.

Правильный ответ: Базис в евклидовом пространстве называется ортонормированным, если все его векторы взаимно ортогональны и имеют длину, равную единице.

Вопрос 11. Предприятие выпускает емкости объёмом 100 л. в форме прямоугольного параллелепипеда. При этом, для соединения боковых граней используются дорогостоящие угловые соединения трех видов: для одной пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений первого типа равна 125$, для другой пары противоположных ребер основания стоимость 1 м угловых соединений второго типа равна 75$, а для боковых ребер стоимость 1 м угловых соединений третьего типа равна 200$. Найти при каких размерах емкости расходы по закупке уголков будут минимальными.

Этапы оценивания решения.

5 баллов. Введены искомые переменные x, y, z – длины боковых ребер. При этом отмечено, что x – это длина ребра основания 1-го типа и таких ребер 2, y – это длина ребра основания 2-го типа и таких ребер 2, z – это длина вертикального бокового ребра и таких ребер 4. Составлена функция стоимости всех ребер.

10 баллов. Составлена функция стоимости всех ребер. Выписано условие $x\,y\,z = 100$. Сформулирована задача отыскания условного минимума. Записана функция Лагранжа.

15 баллов. Найдены необходимые условия локального условного экстремума и найдены точки, в которых возможен локальный экстремум.

20 баллов. Сформулированы достаточные условия локального условного экстремума и найдены точки, в которых возможен локальный экстремум. Приведено решение задачи с незначительными ошибками или недочетами;

25 баллов – полное правильное решение задачи.

Вопрос 12. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T?

Этапы оценивания решения.

5 баллов. Введены необходимые переменные: k – число проголосовавших зрителей, $n_1, n_2, \dots, n_k$ – выставленные ими оценки. Составлена формула для вычисления рейтинга T.

10 баллов. Составлена формула для вычисления рейтинга T. Доказано, из какого максимального значения рейтинга (указанного в задаче целого значения T) должны исходить для получения наибольшее количество зрителей. Указано, при каких значениях $n_1, n_2, \dots, n_k$ это достигается.

15 баллов. Представлено решение в частном случае, когда максимальное значение рейтинга 10 при одном проголосовавшем.

20 баллов. Дополнительно доказано, что наибольшее количество зрителей может быть получено только в том случае, когда мы исходим из максимального значения рейтинга 10 при одном проголосовавшем.

25 баллов – полное правильное решение задачи.

РАЗДЕЛЫ
ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

I. Алгебра и геометрия

Алгебра

Понятие группы, кольца и поля. Поле комплексных чисел. Кольцо многочленов. Деление многочленов с остатком. Теорема Безу. Кратность корня многочлена, ее связь со значениями производных. Разложение многочлена на неприводимые множители над полями комплексных и действительных чисел. Формулы Виета; наибольший общий делитель многочленов, его нахождение с помощью алгоритма Евклида. Кольцо многочленов от нескольких переменных. Симметрические многочлены.

Группа подстановок, четность подстановки. Циклические группы. Разложение группы на смежные классы по подгруппе.

Векторные пространства, базис и размерность. Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Прямые суммы.

Билинейные и квадратичные формы. Приведение квадратичной формы к нормальному виду. Закон инерции. Положительно определенные квадратичные формы.

Линейные отображения векторных пространств, их задание матрицами. Ядро и образ линейного отображения. Матрицы оператора в различных базисах. Собственные векторы и собственные значения. Достаточные условия приводимости матрицы линейного у оператора к диагональному виду. Понятие о жордановой нормальной форме.

Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации. Ортогональные и унитарные матрицы. Линейный оператор, сопряженный к данному. Симметрические и эрмитовы линейные операторы, их спектр. Соответствие между билинейными формами и линейными операторами. Приведение квадратичной формы к главным осям.

Геометрия

Прямые линии и линии второго порядка на плоскости. Квадратичные функции на плоскости и их матрицы. Ортогональные инварианты квадратичных функций. Приведение уравнения линий второго порядка к каноническому виду. Свойства эллипса, гиперболы и параболы.

Плоскости и поверхности второго порядка в пространстве. Теорема о канонических уравнениях поверхностей второго порядка (без доказательства). Эллипсоиды; гиперболоиды; параболоиды. Цилиндры.

Кривизна плоской кривой. Эволюта и эвольвента. Пространственные кривые, репер Френе, кривизна и кручение пространственных кривых. Формулы Френе, натуральное уравнение кривой.

Поверхности в $\mathbf{R}^3$, способы задания поверхностей. Координаты на поверхности, касательная плоскость и нормаль. Первая квадратичная форма поверхности, площадь поверхности. Вторая квадратичная форма и ее свойства. Средняя и гауссова кривизны поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. УРСС, 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
3. Моденов П.С.. Аналитическая геометрия. Москва, МГУ, 1967.
4. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М., Наука, 1974.

2. Математический анализ

Действительные числа. Полнота множества **R**. Существование точной верхней (нижней) грани числового множества, принцип вложенных отрезков.

Предел числовой последовательности, основные свойства сходящихся последовательностей и признаки существования предела. Предельные точки множества и теорема Больцано-Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности. Предел монотонной последовательности. Подпоследовательности, верхний и нижний пределы. Критерий Коши существования предела.

Предел функции в точке, основные свойства. Непрерывные функции. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность композиции. Свойства непрерывных функций на отрезке (теоремы Вейерштрасса, Кантора, о промежуточном значении).

Основные теоремы дифференциального исчисления и их приложения: теоремы Ролля, Лагранжа и Коши о конечных приращениях. Раскрытие неопределенностей. Локальная формула Тейлора. Разложения элементарных функций. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций: признаки постоянства, монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, асимптоты.

Определенный интеграл Римана. Суммы Римана и Дарбу. Критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции и ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства определенного интеграла, теорема о среднем значении. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Существование первообразной от непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница, Замена переменной, интегрирование по частям. Длина дуги и другие геометрические, механические и физические приложения.

Функции многих переменных. Евклидово пространство *n* измерений. Основные метрические и топологические характеристики множеств евклидова пространства, открытые и замкнутые множества и их свойства. Предел, непрерывность функции многих переменных. Свойства непрерывных функций. Дифференцируемость функции, дифференциал и частные производные функции многих переменных. Производная по направлению, градиент. Дифференцирование сложных функций. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Локальные экстремумы, необходимые условия, достаточные условия локального экстремума. Отображения $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, их дифференцирование, матрица производной.

Числовые ряды. Сходимость и сумма числового ряда, критерий Коши. Знакопостоянные ряды, теоремы сравнения. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак сходимости. Признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость. Понятие о бесконечных произведениях.

Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость. Признаки равномерной сходимости. Свойства предельной функции функциональной последовательности и суммы функциональной ряда. Степенные ряды, радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Свойства суммы степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов. Разложение элементарных функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Ряды с комплексными членами, формулы Эйлера.

Несобственные интегралы. Интегралы с бесконечными пределами и интегралы от неограниченных функций, признаки сходимости.

Интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру. Эйлеровы интегралы и их свойства.

Ряды Фурье. Ортогональные системы функций, тригонометрическая система. Ряд Фурье. Сходимость ряда Фурье в точке. Принцип локализации. Минимальное свойство частных сумм ряда Фурье. Неравенство Бесселя. Достаточное условие разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье. Равенство Парсеваля.

Криволинейные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода. Формула Остроградского. Формула Стокса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 2010.
2. Зорич В.А. Математический анализ. Том 1. М.: МЦНМО, 2012.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Том 2. М.: МЦНМО, 2012.
4. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. - М.: Высшая школа, 2000.
5. Демидович. Б.П. Сборник задач и упражнений по мат.анализу, М.:Наука, 1972г. (и другие издания).

3.Теория функций комплексного переменного

Комплексные числа, модуль и аргумент. Сфера Римана. Евклидова и сферическая метрика. Топология на **C,** области, пути и кривые на C.

Предел функции, непрерывность в **C** и в расширенной комплексной плоскости. **C**-дифференцируемость, аналитичность функции. Условия Коши-Римана. Свойства аналитических функций. Критерий аналитичности для класса непрерывно дифференцируемых функций. Конформные и локально-конформные отображения. Геометрический смысл модуля и аргумента для производной от аналитической функции. Гидродинамическая и геометрическая интерпретация для аналитической функции. Комплексный потенциал векторных полей на плоскости.

Степенные ряды, аналитичность суммы степенного ряда, почленное дифференцирование степенных рядов. Гармонические функции. Свойства гармонических функций. Степенная функция, экспоненциальная функция и им обратные. Функция Жуковского. Многозначные аналитические функции. Дробно-линейные отображения, Основные свойства. Круговое свойство. Симметрия. Инверсии. Дробно-линейные изоморфизмы и автоморфизмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1, 2, 3-е изд. М. Лань 1, 2012.
2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. 15-е изд. Лань М., 2012.
3. Краснов М. Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры с подробными решениями. Академия 2012.
4. Маркушевич А.И. Краткий курс аналитических функций. М.: Паука, 1978.
5. Лаврентьев М.А., Шабат В.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
6. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович.И.Г. "Сборник задач но теории функций комплексного переменного". Москва: Наука, 1972.

4. Функциональный анализ

Определение линейного нормированного пространства, примеры норм. Банаховы пространства. Линейные операторы, норма оператора. Обратный оператор. Теорема Банаха об обратном операторе. Компактные операторы. Компактность интегральных операторов.

Гильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Общий вид линейного функционала. Самосопряженные (эрмитовы) и унитарные операторы. Ортогональные системы. Неравенство Бесселя. Базисы в гильбертовом пространстве.

Линейные топологические пространства и обобщенные функции. Полинормированные пространства. Пространства Фреше. Функционал Минковского. Нормируемость и метризуемость.

Основные примеры функциональных пространств: L^1, L^p ($p > 1$), C^0, C^k, C^∞.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. 7-е изд. ФИЗМАТЛИТ, 2004.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. ФИЗМАТЛИТ, 2002.
3. Федоров В. М. Курс функционального анализа. Лань, 2005.
4. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

5. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы первого порядка. Понятие решения. Уравнения и системы порядка выше первого и их сведение к системам первого порядка. Автономные и неавтономные уравнения. Динамические системы. Геометрические понятия, связанные с дифференциальными уравнениями. Фазовое пространство и расширенное фазовое пространство. Поле направлений, интегральные кривые. Векторное поле, фазовые кривые (траектории). Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения. Приемы интегрирования некоторых специальных классов обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнения в полных дифференциалах и интегрирующие множители. Уравнения Бернулли и Риккати.

Линейные уравнения и системы с постоянными коэффициентами. Системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Пространство решений. Фундаментальная система решений. Характеристическое уравнение. Общее решение. Линейное однородное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами: пространство решений, характеристическое уравнение, общее решение. Линейные неоднородные системы уравнений с постоянными коэффициентами: общие свойства, метод вариации постоянных, частное решение системы с правой частью в виде квазимногочлена. Линейное неоднородное уравнение n-ого порядка с постоянными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Демидович Б. П., Моденов В. П. Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. 3-е изд., стер. СПб.: Издательство «Лань», 2008.
2. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Изд-во МГУ, 1984.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., Наука, 1974.