МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Кемеровский государственный университет»

Математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по научной работе
________ В. Г. Дружинин
«27» февраля 2013 г.

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

по специальности
01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Квалификация (степень) –
кандидат наук

Кемерово, 2013

Общие положения

Цель программы по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ: формирование у аспирантов высокого уровня теоретической и профессиональной подготовки, знаний общих концепций и методологических вопросов математики, глубокого понимания основных проблем математического анализа, теории функций комплексного переменного, геометрии и топологии и умения применять полученные знания для решения исследовательских и прикладных задач.

Аспирант за время обучения в аспирантуре обязан сдать кандидатские экзамены по истории и философии науки; иностранному языку и специальной дисциплине (вещественный, комплексный и функциональный анализ).

Целью кандидатского экзамена по специальной дисциплине уровня знаний, полученных аспирантом, его готовность к выполнению научно-исследовательской деятельности.

Форма проведения кандидатского экзамена: устная (экзамен).

Критерии оценки ответов при проведении кандидатского экзамена в аспирантуре: билеты кандидатского экзамена содержат по 3 вопроса по специальности «Вещественный, комплексный и функциональный анализ». Результаты оцениваются по 5-балльной шкале. При ответе на вопросы аспирант должен продемонстрировать глубокие знания по предмету. Вопросы составлены таким образом, чтобы охватить все основные направления современной теории функций, геометрии и топологии, в которых аспирант должен свободно ориентироваться.

Требования к уровню подготовки аспиранта

При сдаче кандидатского экзамена по специальной дисциплине аспирант должен:

знать:

- геометрию многообразий и различных геометрических структур;
- дифференциальную геометрию и ее приложения;
- риманову геометрию;
- теорию функций комплексного переменного;
- теорию функций многих комплексных переменных;
- теорию комплексных многообразий;
- общую и алгебраическую топологию;
- топологию гладких многообразий;
- маломерную топологию, включая теорию узлов и зацеплений;
- теорию пространств отображений и пространств модулей различных геометрических структур.

уметь:

- применять полученные в области теории функций, геометрии и топологии знания для решения конкретных научных, практических, педагогических, информационно-поисковых, методических и других задач;
- планировать, организовывать и вести научно-исследовательскую и учебно-воспитательную работу.

владеть:

- приемами поиска и использования научной, научно-технической и научно-методической информации.

ПРОГРАММА КАНДИДАТСКОГО ЭКЗАМЕНА

специальность 01.01.01 - **вещественный, комплексный и функциональный анализ**

Формула специальности:

Специальность «**Вещественный, комплексный и функциональный анализ** » – область математики, посвященная изучению теории функций, геометрических структур, топологических пространств и их отображений. Основные составные части специальности: теория аналитических функций, общая, алгебраическая и дифференциальная топология. Главные научные цели специальности: изучение геометрических и топологических структур, возникающих в теории функций и ее приложениях.

Область исследования:

1. Геометрия многообразий и различных геометрических структур.
2. Теория аналитических функций.
3. Интегральная геометрия.
4. Теория аналитических функций многих переменных.
5. Общая топология.
6. Алгебраическая топология.
7. Топология гладких многообразий.
8. Маломерная топология, включая теорию узлов и зацеплений.
9. Топология и геометрия особенностей.
10. Теория пространств отображений и пространств модулей различных геометрических структур.

Отрасль наук:

Физико-математические науки.

Введение

В основу настоящей программы положены следующие дисциплины: теория функций многих переменных, геометрия, общая, алгебраическая и дифференциальная топология по разделам: геометрия многообразий и различных геометрических структур; теория римановых поверхностей; дифференциальная геометрия и ее приложения; интегральная геометрия; теория аналитических функций многих переменных; общая топология; алгебраическая топология; топология гладких многообразий; маломерная топология, включая теорию узлов и зацеплений; топология особенностей; теория пространств отображений и пространств модулей различных геометрических структур.

1. Общая топология

Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категории.

Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (отрыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и *C^k*-топология в пространстве гладких отображений).

Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций.

Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения. Расширения Чеха—Стоуна. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в евклидовом пространстве.

Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами.

Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности.

Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность.

2. Алгебраическая топология

Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары.

Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные пространства. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Группы когомологий как группы классов отображений.

Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей.

Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения).

Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения.

Характеристические классы векторных расслоений.

3. Топология гладких многообразий

Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Диффеоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса.

Вложения и погружения. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка). Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса—Бонне.

Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера—Пуанкаре.

Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления.

4. Топология малых размерностей

Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий.

5. Дифференциальная геометрия

Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Деривационные формулы.

Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия.

Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли.

Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства). Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре.

Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами.

Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки.

Характеристические классы и характеристические числа. Конструкция Чженя—Вейля характеристических классов. Характеристические числа.

6. Геометрические структуры на гладких многообразиях

Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур.

Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем.

7. Теория римановых поверхностей

Алгебраические функции и их римановы поверхности. Поток жидкости на плоскости и на поверхности. Регулярные потенциалы. Мероморфные функции. Теория функций на торе. Накрывающие многообразия. Теорема монодромии. Фундаментальная группа. Триангуляция. Ориентируемость. Нормальные формы компактных ориентируемых поверхностей. Группы гомологий и числа Бетти. Фундаментальная группа и одномерная группа гомологий на компактной ориентируемой поверхности. Дифференциалы второго порядка и поверхностные интегралы. Дифференциалы первого порядка и криволинейные интегралы. Теорема Стокса и исчисление внешних дифференциальных форм. Гармонические и аналитические дифференциалы. Гильбертово пространство дифференциалов. Операторы сглаживания. Лемма Вейля и ортогональные проекции. Регулярные гармонические дифференциалы. Билинейные соотношения Римана для дифференциалов с особенностями. Дивизоры. Теорема Римана-Роха. Теорема Абеля. Проблема обращения Якоби.

8. Теория функций многих комплексных переменных

Комплексное пространство. Простейшие свойства голоморфных функций. Основная теорема Хартогса. Степенные и другие ряды. Голоморфные отображения и их основные свойства. Биголоморфные отображения. Автоморфизмы шара и поликруга. Пример Фату. Многообразия и формула Стокса. Теорема Коши-Пуанкаре. Интегральные представления Мартинелли-Бохнера и Лере. Формула Вейля. Накрытия и римановы области. Расслоения и пучки. Аналитические множества и их основные свойства. Подготовительная теорема Вейерштрасса. Касательное и кокасательное расслоения. Теоремы Севери о продолжении. Теорема Хартогса и устранение особенностей. Области голоморфности. Оболочки голоморфности. Мероморфные функции. Группы когомологий с коэффициентами в пучках. Точные последовательности пучков. Первая и вторая проблема Кузена. Применение проблем Кузена. Многомерные вычеты. Теория Мартинелли и принцип двойственности. Логарифмический вычет. Локальное обращение отображений. Теорема Реммерта. Эрмитовы формы и многообразия. Кривизна Риччи и метрика Фубини-Штуди.

Критерии оценки знаний на экзамене

Оценка «**5**» на экзамене ставится при:

- правильном, полном и логично построенном ответе;
- умении оперировать специальными терминами;
- использовании в ответе дополнительный материал;
- иллюстрировать теоретические положения решением задач.

Оценка «**4**» на экзамене ставится при:

- правильном, полном и логично построенном ответе;
- умении оперировать специальными терминами;
- использовании в ответе дополнительный материал;
- иллюстрировать теоретические положения решением задач,

Но в ответе

- имеются негрубые ошибки или неточности;
- возможны затруднения в использовании практического материала;
- делаются не вполне законченные выводы или обобщения.

Оценка «**3**» ставится при

- схематичном неполном ответе,
- неумении оперировать специальными терминами или их незнание,
- с одной грубой ошибкой,
- неумением приводить примеры практического использования научных знаний.

Оценка «**2**» ставится при

- ответе на все вопросы билета с грубыми ошибками,
- неумением оперировать специальной терминологией,
- неумением приводить примеры практического использования научных знаний.

Основная литература

1. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А., Общая топология, М., 1979.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 2006.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. Ч. 1. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей, Ч. 2. Геометрия и топология многообразий и Ч. 3. Методы теории гомологий. М.: Наука, 2008 (Ч. 1 и 2 переизданы. М.: Эдиториал УРСС).
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1, 2. М.: Наука, 1981.
5. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Факториал Пресс, 2000.
6. Нарасимхан Р. Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.
7. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: Изд-во МЦНМО, 2004.
8. Новиков С.П. Топология. М. – Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
9. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр 3, Гладкие многообразия. М.,Наука, 1987.
10. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. М.—Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
11. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. М.: Наука, 1989.
12. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
13. Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.
14. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: Изд-во МЦНМО, 1997.
15. Трофимов В.В., Фоменко А.Т. Риманова геометрия // Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. ВИНИТИ. 2002. Т. 76. С. 5-262.
16. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть 1,2. М:, Наука, 2005

Дополнительная литература

17. Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию – М.:Высшая школа, 1980.
18. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
19. Келли Дж. Общая топология. М.: Наука, 1981.
20. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
21. Винберг Э.Б., Онищик А.Л. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. М.: Наука, 1988.
22. Чжень Ш.-Ш. Комплексные многообразия. М.: Иностранная литература, 1961.
23. Роджерс К. Укладки и покрытия. М.: Мир, 1968.
24. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. М.: Наука, 1980.
25. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981г.
26. Коксетер Г.С.М. Введение в геометрию. М.: Наука, 1966.
27. Кострикин А.И. Введение в алгебру, М., 2009
28. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. М.: Мир, 1972.
29. Милнор Дж. Теорема об h-кобордизме. М.: Мир, 1969.

30. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия (первое знакомство), изд-во МГУ, 1990
31. Пресли А., Сигал Г. Группы петель. М.: Мир, 1990.
32. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
33. Хирш М. Дифференциальная топология. М.: Мир, 1979.
34. Бэйкер Г.Ф. Абелевы функции. М:, МЦНМО, 2008.

Программное обеспечение и Интернет-ресурсы

1. http://univertv.ru/video/matematika/ Открытый образовательный видеопортал UniverTV.ru.
2. http://elibrary.ru Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU.
3. http://www.iqlib.ru/ Электронная библиотека IQlib образовательных и просветительских изданий.
4. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library.htm EqWorld – мир математических уравнений. Учебно-образовательная физико-математическая библиотека.
5. http://www.mathnet.ru – Math-Net.Ru, Общероссийский математический портал.
6. http://arxiv.org – arXiv.org, международный архив электронных научных статей.
7. http://dmvn.mexmat.net/geometry.php – учебные материалы для студентов МехМата МГУ.
8. http://mathnet.preprints.org – MPRESS, Европейская система поиска математических препринтов.
9. http://www.mccme.ru/pdc/ – МЦНМО, Московский центр непрерывного математического образования.
10. http://elibrary.ru – eLIBRARY.RU, Научная электронная библиотека.
11. http://www.algebraic.ru/doku.php?id=start – Algebraic.ru, Электронная математическая энциклопедия.
12. http://www.imath.kiev.ua/~sigma/ – Журнал SIGMA, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications.
13. http://wiki-geometry.ru/index.php – Электронная математическая энциклопедия по геометрии и анализу.

Программа составлена в соответствии с ФГТ к структуре основной профессиональной образовательной программы послевузовского профессионального образования и с учетом рекомендаций и ОПОП ППО по специальности подготовки аспиранта 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Составитель программы: д.ф.-м.н., профессор кафедры математического анализа Чуешев В.В.

Рабочая программа обсуждена на заседании кафедры,
протокол № 9 от «12» 04 2012 г.
заведующий кафедрой ______________ Смоленцев Н.К.

Одобрено методической комиссией математического факультета,
протокол № 10 от «26» мая 2012 г.
председатель МК ______________ Фомина Л.Н.